

# CHRONOMETRIE

SOMMERZEIT HOCHZEIT ZEITALTER ZEITSTRAFE SCHULZEIT ZONENZEIT ZEITSCHRIFT ZEITLOS UNZEIT

Deutsche Gesellschaft für

TEILZEIT ZEITGLEICHUNG ORTSZEIT ZEITLUPE EISZEIT ZEITWORT WINTERZEIT ZEITGEWINN ZEITNOT BESTZEIT ZEITPREISE



TERNZEIT ZEITFENSTER TAGESZEIT ZEITSPRUNG WELTZEIT ZEITPUNKT URZEIT ZEITUNG UNZ

Mitteilungen Nr.161 - Frühjahr 2020

# Aus der Chronometrie

## Ein einfaches Gang-Modell mit Spindel und Waag

Ralf Lempken

### Einführung

Angesichts der Fülle an Aufsätzen über technisch aufwendige Zeitmesser in der Fachliteratur, seien diese aus fremder Fertigung oder von den Verfassern selber gebaut, fand ich den Nachbau einer in [1] (Bild 1) dargestellten ‚Kaffeedosenuhr‘ (Bild 2a) als ‚Gegengewicht‘ zu ersteren doch recht erfrischend. Funktioniert diese dann (wider Erwarten) auch noch wie gewünscht, ist der Frust über das eigene Unvermögen, einen jener technisch aufwendigen Zeitmesser im Eigenbau zu realisieren, wie weggefegt. Bei der auf die Fertigstellung folgenden Beschäftigung mit der Funktionsweise dieser ‚Uhr‘, gelangt man zu der Erkenntnis, dass die dahinterstehende Theorie doch nicht so banal ist wie es scheinen mag. Des Weiteren möchte ich mit dem Aufsatz zeigen, dass sich die auf theoretischem Wege berechneten Werte unter Verwendung ‚haushaltsüblicher‘ Geräte mit einer akzeptablen Toleranz messtechnisch nachvollziehen lassen. Ich hoffe, dass ich ein wenig von

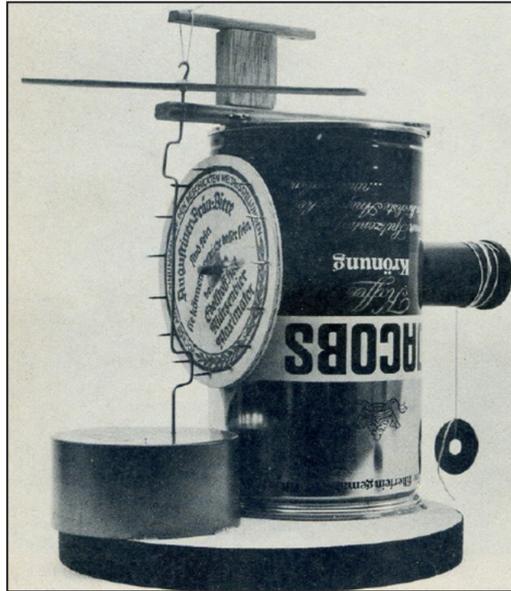


Bild 2a  
Die ‚Bastel-Uhr von Peter Fries‘ aus [1, Seite 30].

dieser persönlichen Erfahrung weitergeben, und natürlich auch zum Nachbau anregen kann. Der Aufsatz gliedert sich in Praxis, Theorie und ein wenig Messtechnik, worin sich Praxis und Theorie vereinen. Im Abschnitt Praxis werden zunächst einige Hinweise zum Aufbau des Modells gegeben. Nach dem theoretischen Teil werden Vorschläge gemacht, wie sich die Theorie auf das Modell anwenden lässt.

Geschichtlich ist das System aus Spindel und Waag, als eine Kombination von Zeittaktgeber und Hemmung, etwa zeitgleich mit den ersten Räderuhren einzuordnen, da bei beiden, im Gegensatz zu den Elementaruhren (Wasser-, Sonnen- und Sanduhren (Anm. 1) eine Hemmung für einen regulierbaren, gleichmäßigen und reproduzierbaren Ablauf sorgt. Wie das Beispiel der Sanduhr zeigt, muss eine Hemmung aber nicht zwingend mit einem periodischen Zeittaktgeber verbunden sein. Da weder die Waag, noch die Spindel mit den Spindellappen getrennt betrachtet eine Funktion in einem Uhrwerk übernehmen können, war die Kombination aus beiden Elementen vermutlich eine Neuerung der damaligen Zeit. Die Schwingungen von Masse-Feder Systemen, sowie derjenigen des Pendels waren, wenn auch noch nicht mathematisch exakt, wohl aber im Prinzip bereits lange vor Galileo Galilei aus Beobachtungen in der Natur und im täglichen Leben bekannt. Die Erkenntnisse aus

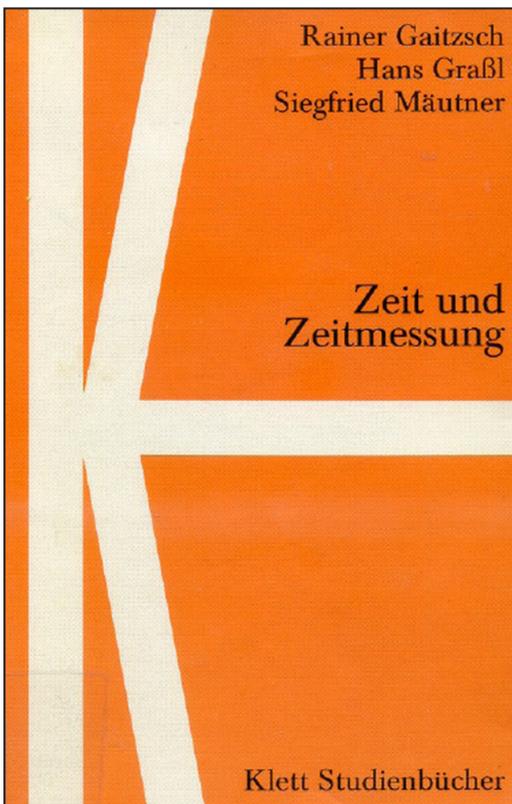


Bild 1

Titelseite des Buches „Zeit und Zeitmessung“ [1].

solchen Beobachtungen könnten den entscheidenden Hinweis für die Erfindung dieser Kombination geliefert haben.

## Der Aufbau des Modells

Der Zusammenbau ist im Grunde anhand von Bild 2b selbsterklärend. Dennoch könnten ein paar Hinweise hilfreich sein.

Die für das Gangmodell benötigten Einzelteile sind im Wesentlichen

- die Grundplatte (6),
  - die als Trägersäule dienende Blechdose (8),
  - eine Fadenspule (1) für das Antriebsgewicht,
  - zwei runde Bierdeckel und 15 Nägel (z.B. 15mm x 1mm) für das Hemmungsrad (2),
  - eine Stricknadel etwa 4mm Durchmesser für die Hemmungsradwelle (7)
  - eine Stricknadel etwa 2 mm Durchmesser für die Spindel (4)
  - ein dünnes Sperrholzbrettchen z.B. 15mm \* 180mm \*3mm für die Waag (5),
- sowie diversives Holzmaterial als Stützelemente für die Spindel.

Die Verwendung einer Blechdose als Standsäule hat gegenüber einem massiven Körper den Vorteil, dass wegen der sehr geringen Wandstärke solcher Dosen, die Auflagefläche der Hemmungsradwelle, und damit auch die Reibung sehr gering ist. Die Bohrungen für diese Welle durch zwei sich im Abstand des Dosendurchmessers gegenüberliegenden Punkten sollten möglichst exakt auf gleicher Höhe über der Grundplatte liegen, damit sich im späteren Betrieb das Hemmungsrad mit der Welle nicht nach vorn oder hinten verschiebt. Falls dies dennoch vorkommen sollte, kann – wie in Bild 2b zu sehen – ein dünner Pappstreifen knapp oberhalb der Hemmungsradwelle an der Dose so befestigt werden, dass dieser das Hemmungsrad mit leichtem Andruck in einem konstanten Abstand zur Spindel hält. Die Reibung des Streifens am Hemmungsrad lässt sich mit etwas Vaseline minimieren.

Wesentlich für die Funktion des Modells ist die Anzahl  $N$  der als Hemmungsstifte dienenden Nägel. Diese muss so bemessen sein, dass 360 Grad durch  $N$  ohne Rest teilbar,  $N$  selbst aber ungerade ist. Teilt man 180 Grad durch den Winkelabstand zweier Hemmungsstifte, bleibt ein Rest von der Größe der Hälfte eines solchen Winkels. Dadurch wird gewährleistet, dass bei Parallelstellung eines Spindellappens mit einem Hemmungsstift, die gegenüberliegende Seite der Spindel zwischen zwei Hemmungsstiften steht (Anm. 2) In diesem Nachbau wurden wie in der Vorlage aus [1] 15 Nägel verwendet. Damit ergibt sich eine Winkelteilung von 24 Grad.

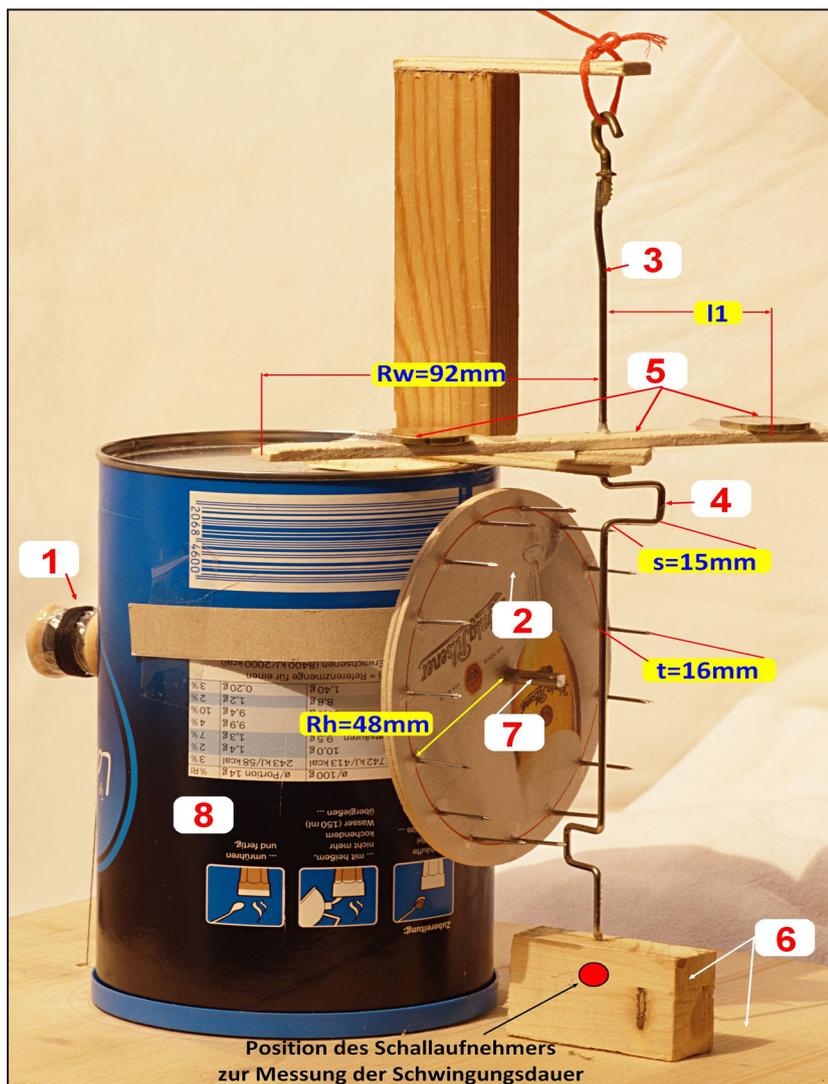
Ein weiterer, für die Funktion wesentlicher Punkt ist die Anordnung der Spindellappen an der Spindel. Dazu sollte man sich zunächst für eine Drehrichtung des Hemmungsrades entscheiden (hier rechtsdrehend). Die Spindellappen müssen nun so angeordnet sein, dass bei Auslenkung eines der beiden Lappen der andere hinterher, und nicht vorweg läuft. Der untere Spindellappen wird in der im Bild 3a links dargestellten Situation aktiv durch den sich nach links bewegenden Hemmungsstift  $S_1$  nach links ausgelenkt. Dadurch dreht sich die Spindel beim Blick von oben auf die Waag links herum. Der obere Spindellappen folgt in der für diesen passiven Phase in gleicher Bewegungsrichtung hinterher. Diese für den unteren Spindellappen aktive Bewegungsphase endet mit dem Kontakt des sich nach rechts bewegenden Hemmungsstiftes  $S_9$  mit dem oberen Spindellappen. Die nun beginnende aktive Phase für den oberen Spindellappen geht, wegen der gegensätzlichen Bewegungsrichtung der Hemmungsstifte  $S_1$  und  $S_9$ , mit einer Umkehr der Drehrichtung der Spindelwelle einher.

Die Gangfrequenz des Modells lässt sich durch mehrere Merkmale beeinflussen. Da wäre zunächst das Antriebsgewicht. Je größer dieses ist, desto schneller bewegt sich die Waag. Verschiebt man die an der Waag befestigten Gewichte nach

Bild 2b

Gesamtansicht des nachgebauten Gang-Modells.

- 1.: Fadenspule für Antriebsgewicht
- 2: Hemmungsrad mit Stiften
- 3: Spindel
- 4: Spindellappen
- 5: Waag (Foliot) mit symmetrisch angeordneten Gewichten
- 6: Grundplatte mit Gegenlager für Spindelwelle
- 7: Hemmungsradwelle
- 8.: Blechdose als Standsäule



außen, weiter von der Spindelwelle weg, verringert sich die Gangfrequenz. Bei Verschiebung in entgegengesetzter Richtung erhöht sich die Frequenz (Bilder 6a und 6b). Möchte man ein wenig mit der Gangfrequenz experimentieren, ist es sinnvoll, die Einflussgrößen variabel zu gestalten. Verwendet man als Antriebsgewicht eine gewöhnliche Gewindeschraube, z.B. M6, so lässt sich das Gewicht durch Aufschrauben einzelner Muttern in gleichen Stufen erweitern. Für die an der Waag befestigten Massen gilt die Bedingung, dass jeder Arm mit einer exakt gleichen Masse belegt sein muss. Diese Bedingung lässt sich z.B. durch Verwendung von Geldmünzen sicherstellen. Dabei werden Münzen gleichen Wertes auf jeder Seite der Waag im selben Abstand zur Spindelachse befestigt. Eine solche variable Befestigung lässt sich mit einem dünnen Klettstreifen auf der Waag und den entsprechenden Gegenstücken an den Gewichten realisieren.

### Die Theorie

Das Modell besteht aus den beiden Einheiten Antrieb mit Hemmungsrad, sowie Spindel mit Waag.

#### Antrieb mit Hemmungsrad

Das Hemmungsrad wird über eine Fadenspule (1 in Bild 2b) mit einem Gewicht angetrieben. Um eine eventuelle Abhängigkeit der Gangfrequenz vom Antriebsgewicht messtechnisch erfassen zu können, ist letzteres in gleichen Masseschritten  $M(i)$  erweiterbar. Auf eine als Gewichtsträger dienende Schraube der Masse  $M(0)=11,1g$  können mehrere Muttern mit einer Masse von hier  $M(i)=4,3g$  aufgeschraubt werden. Entsprechend berechnet sich das Antriebsmasse aus:

$$Gl\ 1a: \quad Ma = (M(0) + k * M(i)),$$

bzw. das Antriebsgewicht aus:

$$Gl\ 1b: \quad Ga = G * Ma$$

Das Antriebsgewicht ( $Ga$ ) erzeugt an der Hemmungsradwelle über den Radius ( $r$ ) der Fadenspule ein Drehmoment ( $Dh$ ).

$$Gl\ 1c: \quad Dh = Ga * r$$

Mit diesem Drehmoment können die Stifte des Hemmungsrades die Kraft an die Spindellappen abgeben.

$$Gl\ 1d: \quad h = Dh / Rh = Ga * r / Rh = G * Ma * r / Rh ;$$

$G = \text{Fallbeschleunigung} = 981 \text{ cm}/(\text{s}^2)$

Ein improvisierter Aufbau einer solchen Messung ist in Bild 4a gezeigt.

Diese Kraft  $Fh$  erzeugt über die Breite  $s$  der Spindellappen an der Spindel ein Drehmoment  $Ds$ .

$$Gl\ 1e: \quad Ds = Fh * s,$$

daraus resultiert eine Kraft  $Fw$  an den äußeren Enden der Waag im Abstand  $Rw$  von der Spindelachse.

$$Gl\ 1f: \quad Fw = Fh * s / Rw$$

Das von der Spindelwelle abgegebene Drehmoment  $Ds$  lässt sich über die Kraft an den Enden der Waag auf ähnliche Weise messen, wie das Drehmoment  $Dh$  an der Welle des Hemmungsrades. Bild 4b zeigt einen mit der Kraftmessung an den Hemmungsstiften vergleichbaren einfachen Aufbau.

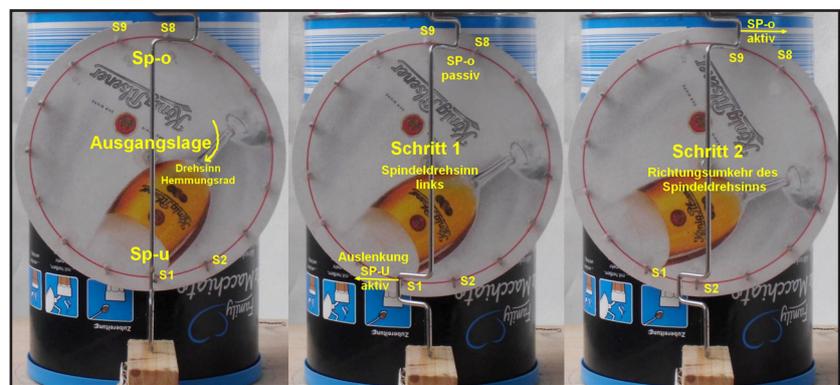


Bild 3a:

Darstellung der Positionen von Hemmungsrad und Spindellappen zueinander für die Ausgangsposition (links), die Position am Ende von Schritt 1 (erste Halbschwingung der Waag, Mitte) und die Position am Ende von Schritt 2 (zweite Halbschwingung, rechts).

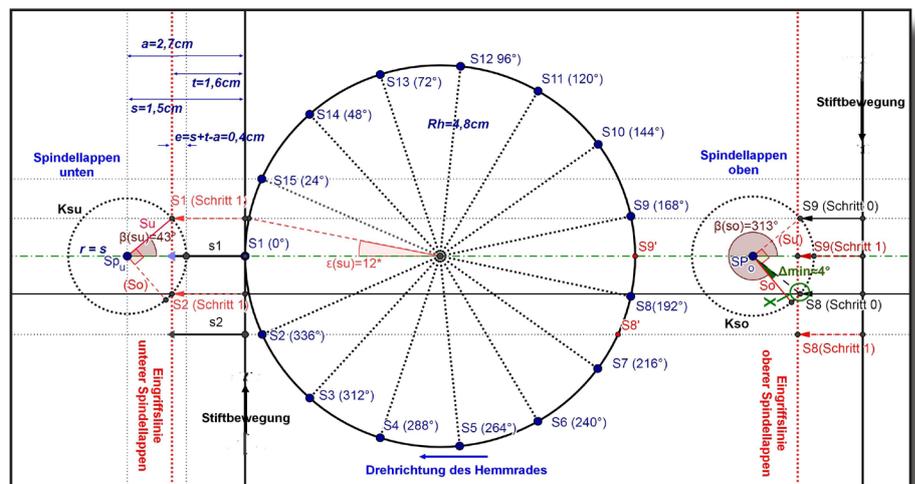
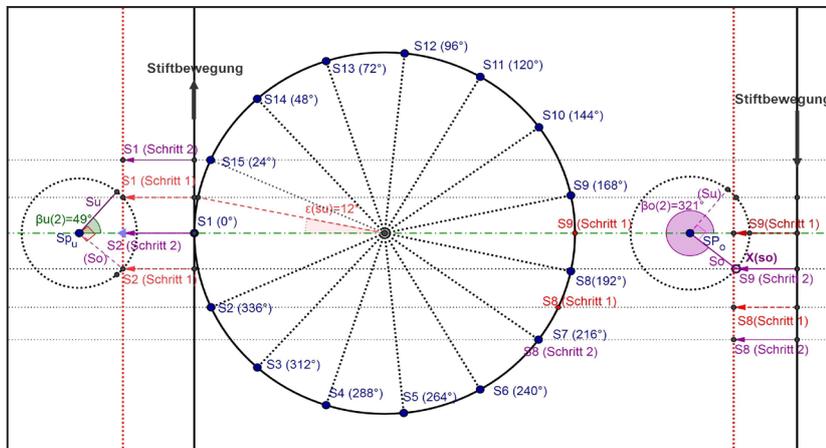


Bild 3b

Darstellung der geometrischen Verhältnisse für die Situationen aus Bild 3a links und Mitte.

### Das System Hemmungsrad, Spindel, und Waag

Wenn es wie hier um Drehungen und Winkel geht, ist die Angabe von Bezugsrichtungen unabdingbar. Für die nachfolgenden Beschreibungen sollen folgende Richtungskonventionen gelten (siehe Bilder 3b und 3c).



**Bild 3c:**  
Darstellung der geometrischen Verhältnisse für die Situation aus Bild 3a rechts.

Beim Blick von vorn auf die Welle des Hemmungsrades, dreht sich dieses beim Betrieb des Modells rechts herum. Der dabei von den Hemmungsstiften durchlaufene Winkel  $\epsilon$  wird von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ , beginnend bei der 9 Uhr Position (waagerechte Lage der Abbildung) auf dem Hemmungsrad rechtsdrehend positiv gezählt.

Die Winkel  $\beta(su)$  und  $\beta(so)$ , welche die Spindellappen in ihren jeweiligen Bewegungskreisen  $K_{su}$  und  $K_{so}$  durchlaufen, werden von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ , beginnend bei der 3 Uhr Position linksdrehend positiv gezählt.

Das Hemmungsrad ist mit 15 Stiften bestückt. Entsprechend hat jeder Stift zu seinen Nachbarn einen Abstand von 24 Grad. Steht ein Stift auf der Höhe des unteren oder oberen Spindellappens in der Ebene der Spindelwelle, so steht letztere im Bereich des gegenüberliegenden Spindellappens zwischen zwei Hemmungsstiften. Dies resultiert daraus, dass zwar 360 Grad ganzzahlig durch 24 Grad teilbar ist, nicht jedoch 180 Grad.

Die für die Funktion des Systems erforderliche gegenseitige Orientierung von oberem und unterem Spindellappen wird also durch die gewünschte Drehrichtung des Hemmungsrades vorgegeben. In den Bildern 3b und 3c wird der untere Spindellappen (Su) durch das rechtsdrehende Hemmungsrad mit dem Hemmungsstift (S1) angetrieben (linke Darstellung in Bild 3a und erteilt der Spindelwelle eine Linksdrehung. Der obere Spindellappen muss dann so gegenüber dem unteren gedreht sein, dass ersterer bezogen auf die Drehrichtung der Spindel hinterherläuft, also um 90 Grad nach rechts verdreht bei

rechtsdrehendem Hemmungsrad.

Es sind im Wesentlichen zwei Eigenschaften des Systems aus Hemmungsrad und Spindel, die dessen Funktion bestimmen.

1. Die diametrale Anordnung der Spindellappen relativ zum Hemmungsrad bewirkt, dass erstere von dem Hemmungsradstiften in jeweils entgegengesetzten Richtungen bewegt werden, und

2. wird durch das um 90 Grad versetzte Anbringen der Spindellappen an der Spindel sichergestellt, dass diese entgegengesetzte Drehung der Spindellappen phasenverschoben und nicht zeitgleich erfolgt. Hat ein Spindellappen während der Bewegungsphase Kontakt mit einem Hemmungsstift, so ist dies seine aktive, bewegt er sich dagegen ohne Kontakt, seine passive Phase. Wie weiter unten noch gezeigt wird, setzt sich der eingeschwingene Zustand im Betrieb zu einem wesentlichen Teil aus Bewegungsabschnitten zusammen, bei denen keiner der Spindellappen Kontakt mit einem Hemmungsstift hat. Dann befindet sich das Hemmungsrad in freier Drehung, und beide Spindellappen sind in einer passiven Phase.

Die Bilder 3b bzw. 3c sollen die geometrischen Verhältnisse, der in Bild 3a wiedergegebenen drei Momentaufnahmen verdeutlichen. Im Betriebszustand pendelt das System zwischen den Schritten 1 und 2 hin und her. Der dabei von der Spindel bzw. der Waag durchlaufene Winkelbereich  $\Omega$  sollte in etwa mit dem in Bild 5b dargestellten Messwert vergleichbar sein.

Bild 3b zeigt die Phase von der Auslenkung des unteren Spindellappens aus der Ausgangslage (Schritt 0) bis zum Ablösen desselben von dem aktiven Hemmungsstift S(i) (hier:  $i=1$ ). Dies markiert das Ende von Schritt 1. Bild 3c zeigt die darauffolgende Bewegungsphase bis zum Ablösen des oberen Spindellappens von dem Hemmungsstift S(i+8), womit dann Schritt 2 beendet ist. Die Ausgangslage (Schritt 0) wird im stationären Betrieb des Modells nicht mehr durchlaufen. Bei jedem folgenden, wieder mit Schritt 1 beginnenden Zyklus, wird  $i(\text{neu}) = i(\text{alt})+1$ . Die aktive Phase wird also sowohl für den unteren, als auch für den oberen Spindellappen von dem Hemmungsstift mit der nächstfolgenden Nummer eingeleitet. Es wird kein Stift übersprungen (Anm. 3).

Zu Beginn des dargestellten Bewegungsablaufs wird hier (Bild 3b) der untere Spindellappen aus seiner definierten Ausgangslage (Schritt 0) aktiv durch den Stift S1 aus der 3 Uhr Position in der Ebene seines Bewegungskreises  $K_{su}$  heraus linksdrehend um  $\beta(su) \approx 43$  Grad zwischen die

1 und 2 Uhr Position weiterbewegt, wobei sich der Stift S1 seinerseits mit dem Hemmungsrad um  $\varepsilon(\text{su}) \approx 12$  Grad rechtsdrehend weiterdreht (Anm 4). Diese Auslenkung ist für den unteren Spindellappen die ‚aktive Bewegung‘. Zeitgleich wird der um 90 Grad in Drehrichtung nachlaufende obere Spindellappen ‚passiv‘ ebenfalls nach links um den gleichen Winkel  $\beta(\text{so-passiv}) = \beta(\text{su-aktiv}) \approx 43$  Grad in eine Position zwischen 4 und 5 Uhr gedreht. Das System befindet sich jetzt am Ende von Schritt 1, der aktiven Phase des unteren Spindellappens.

Die Verbindungen der Spitzen aller Hemmungsstifte liegen in einer ‚Eingriffsebene‘ parallel zum Hemmungsrad, welche die Spindellappen im Betrieb zumindest berühren, für eine stabile Funktion aber besser durchdringen sollten. Das Maß dieser Durchdringung ist die von der Breite  $s$  der Spindellappen, der Länge  $t$  der Hemmungsstifte, und dem Abstand  $a$  zwischen Hemmungsrad und Spindelwelle abhängigen ‚Eingriffstiefe‘  $e$

$$\text{Gl. 1g: } e = s+t-a.$$

Die Eingriffslinien in den Bildern 3b und 3c sind die Schnittgeraden der Eingriffsebenen mit der Papierebene für den unteren und oberen Spindellappen (su und so).

Die aktive Phase kann für einen Spindellappen erst in dem Schnittpunkt ( $X_u, X_o$ ) seines Bewegungskreises ( $K_{su}, K_{so}$ ) mit der Eingriffslinie beginnen. Für diese Schnittpunkte gilt die Bedingung

$$\text{Gl. 1h: } R_h \cdot \sin(\varepsilon) = r_s \cdot \sin(\beta).$$

Daher muss, wie in Bild 3b gezeigt, nach dem Ende der aktiven Phase des unteren Spindellappens (Ablösen vom Stift S1), sich der obere Spindellappen zum Erreichen eines solchen Schnittpunktes und der damit verbundenen Richtungs-umkehr der Spindeldrehung, noch einen kleinen Winkel ( $\Delta_{so}$ ) weiterdrehen. Dieser Winkel bildet etwa die Hälfte des gesamten Drehwinkels der Spindel (der Winkel der aktiven Phase ist klein gegen  $\Delta$ ), da das System im Betrieb etwa symmetrisch zwischen den Schritten 1 und 2 hin und her pendelt.

Die ‚Schwingungsdauer‘  $T_m$  ist diejenige Zeit, welche die Waag für eine vollständige Auslenkung in beiden Drehrichtungen der Spindel benötigt. Die Gangfrequenz  $f$  ist der Kehrwert dieser ‚Schwingungsdauer‘. In dem Impuls-Zeit Diagramm in Bild 7 ist  $T_m$  der Zeitraum zwischen drei Impulsen.

$$\text{Gl.1j: } f = 1/T_m$$

Der Winkel ( $\Omega$ ) einer vollständigen Auslenkung der Waag ist nur von der Anzahl der Hemmungsstifte und der Geometrie zwischen Hemmungsrad und Spindel mit Spindellappen (Eingriffstiefe) abhängig. Je höher die Gangfrequenz desto schneller muss die Waag diesen Winkel durchlaufen. Diese Geschwindigkeit wird der Waag von dem Drehmoment  $D_s$  an der Spindel erteilt, welches die Waag entgegen dem Widerstand der Trägheit (genauer: Massenträgheitsmoment  $J$  der bewegten Massen beschleunigt. Je größer diese sogenannte Winkelbeschleunigung  $\alpha$ , desto kleiner die von der Waag zum Durchlaufen des Auslenkungswinkels benötigte Zeit  $T_m$ . Die bestimmenden Größen für die Gangfrequenz  $f=1/T_m$  sind demnach die Winkelbeschleunigung und das dieser entgegenwirkende Massenträgheitsmoment.

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich z.B. nach [5] als Quotient aus dem beschleunigenden Drehmoment ( $D_s$ ) und dem dieser Beschleunigung entgegenwirkenden Massenträgheitsmoment ( $J$ ).

$$\text{Gl.1k: } \alpha = D_s/J,$$

das Massenträgheitsmoment berechnet sich darin vereinfacht aus

$$\begin{aligned} \text{Gl 1m: } J &\cong J(\text{Waag}) \\ &= m(\text{Waag}) \cdot R_w^2 / 4 + 2 \cdot M_w \cdot l^2 \end{aligned}$$

Die sich aus Gl.1k ergebende Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ist während der aktiven Phase eines Spindellappens (direkter Kontakt mit einem Hemmungsstift) wirksam. Den verbleibenden Rest des Auslenkungswinkels  $\Omega$  durchläuft das System Spindel mit Waag mit annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit in freier Drehung. Da mit den hier verfügbaren einfachen Mitteln diese Aufteilung des Auslenkungswinkels in einen aktiven und einen passiven Abschnitt nicht quantitativ bestimmt werden kann (Anm. 5), lässt sich auch die Schwingungsdauer  $T_m$  bzw. die Gangfrequenz auf diesem Weg nicht berechnen. Eine Möglichkeit wäre, aus den Messwerten für Auslenkungswinkel und mittlere Schwingungsdauer zusammen mit der aus Gl. 1k berechneten Winkelbeschleunigung die Winkel aufteilung zu berechnen, und das Ergebnis dann auf Plausibilität bezüglich des Modells zu prüfen.

## Messungen am Modell

Das Modell bietet die Möglichkeit, einige auf theoretischem Wege ermittelten Werte für Kräfte, Drehmomente, Winkel und Gangfrequenz mit einfachen Mitteln messtechnisch auf Plausibilität

zu prüfen. Es wäre schön, wenn sich die theoretisch berechneten Werte für Kräfte, Drehmomente, Winkel und Gangfrequenz mit einfachen Mitteln annähernd bestätigen ließen.

Den Anfang der ‚Wirkungskette‘ von der Antriebskraft bis zur schwingenden Waag bildet die Gewichtskraft ( $G_a$ ) der Antriebsmasse ( $M_a$ ), welche über die Fadenspule der Welle des Hemmungsrades ein Drehmoment ( $D_h$ ) erteilt. Dieses Drehmoment wird über den Radius ( $R_h$ ) des Hemmungsrades in eine Kraft ( $F_h$ ) umgesetzt, mit welcher die Hemmungsstifte die Spindellappen antreiben. Diese Kraft ( $F_h$ ) erzeugt über die Breite ( $s$ ) der Spindellappen ein Drehmoment ( $D_s$ ), welches letztendlich die Waag in Drehung versetzt. Wie lassen sich nun diese dynamischen Größen an unserem Modell erfassen?

Das Antriebsgewicht lässt sich mit einer grammgenauen Küchenwaage bestimmen. Die Kräfte an den Hem-



Bild 4a:  
Messung der Kraft ( $F_h$ ) an den Hemmungsstiften.

mungsstiften und an den Enden der Waag können mit einer sogenannten Löffelwaage näherungsweise gemessen werden. Bild 4a zeigt Aufbau und Ergebnis einer Messung, welche mit einer Antriebsmasse von  $M_a=24g$  durchgeführt wurde. Die Theorie liefert für diese Antriebsmasse nach Gl. 1d die Kraft  $F_h(\text{theor})=G \cdot 5,0g$ . Für die Kraft  $F_w$  an der Waag in  $R_w=92mm$  Abstand von der Spindelwelle und  $s=15mm$  Breite der Spindellappen wird nach Gl. 1f  $F_w/G= 5,0g \cdot 15mm/92mm = 0,8g$ . Gemessen wurden mit den in den Bildern 4a und 4b gezeigten Anordnungen  $F_s/G=7g$  und  $F_w/G=0,8g$  (Anm. 6).

Bild 4a zeigt die Messung der Kraftübertragung von der Antriebsmasse ( $M_a$ ) über die Kraft ( $F_h$ ) an den Hemmungsradstiften bis zum Drehmoment  $D_s=R_w \cdot F_w$  an der Spindel.

Das Drehmoment  $D_s$  an der Spindelwelle versetzt

die Waag in eine beschleunigte Drehbewegung. Bild 5 zeigt eine Möglichkeit, die Winkelauslenkung  $\Omega$  der Waag im Betriebszustand zu messen. Dafür wurden zwei Markierungen (blaue Punkte) äquidistant zur Spindelwelle auf der Waag angebracht. Fotografiert man letztere während des Betriebs genau senkrecht von oben mit einer Belichtungszeit von etwa 1 Sekunde, markieren die Punkte zwei sich gegenüberliegende Kreis-segmente, welche der maximalen Auslenkung ( $\Omega$ ) der Waag im dynamischen Betriebsfall entsprechen. Dieser Winkel ist bei gegebener Anzahl Hemmungsradstifte ausschließlich abhängig von der Eingrifftiefe  $e=(s+t-a)$  der letzteren in die Spindellappen (siehe Bild 3b). Bei dem vorliegenden Modell ist mit  $s=1,5cm$ ,  $t=1,6cm$  und  $a=2,7cm$   $e=0,4cm$ .

Bei



Bild 4b  
Messung der Kraft ( $F_w$ ) an den Enden der Waag im Abstand ( $R_w$ ) von der Spindelwelle.

gegebener Eingrifftiefe  $e$  wird die Gangfrequenz  $f$  zu einem Teil von der Winkelbeschleunigung  $a$  bestimmt, welche das Drehmoment  $D_s$  an der Spindel der Waag erteilt, und zu einem weiteren Teil von dem Winkel  $2 \cdot \Delta$  welchen die Waag bei freier Drehung des Hemmungsrades insgesamt in beiden Drehrichtungen überstreicht. Die Schwingungsdauer  $T_m$ , als diejenige Zeit, welche die Waag für eine vollständige Auslenkung in beiden Drehrichtungen benötigt, ist unter Vernachlässigung des beschleunigten Teils näherungsweise die zum Durchlaufen dieses Winkels  $2 \cdot \Delta$

benötigte Zeit. Die Gangfrequenz ist dann der Kehrwert dieser Dauer. An dem hier untersuchten Modell wurde die Schwingungsdauer mit der in [4] beschriebenen Methode bestimmt. Ziel dieser Messung war es, die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Antriebsmasse  $M_a$  und von der Massebelegung auf der Waag zu bestimmen. Das Ergebnis ist in Tabelle 1 zusammengestellt (Anm. 7).

Die Bilder 6a und 6b zeigen eine grafische Auswertung von Tabelle 1.

Wie Bild 6a zeigt, nimmt erwartungsgemäß, die mittlere Schwingungsdauer mit wachsender Antriebsmasse ab, bzw. die Gangfrequenz wegen  $f = 1/T_m$  zu, wobei die Kurven mit steigender Antriebsmasse etwas flacher werden. Die Ursache für diese Reaktion ist die Zunahme des Drehmoments an der Hemmungsradwalze, und die Übertragung dieses Drehmoments über Hemmungstifte und Spindellappen auf die Winkelbeschleunigung der Waag. Mit einer größeren Winkelbeschleunigung wird die Winkelauslenkung  $\Omega$  in einer kürzeren Zeit  $T$  durchlaufen.

Vergrößert man den Abstand der Massen auf der Waag zur Spindelachse, so steigt die Schwingungsdauer an, bzw. die Gangfrequenz nimmt ab (Bild 6b). Ursache dieses Verhaltens ist das proportional zum Quadrat des Abstandes anwachsende, die Winkelbeschleunigung bremsende Massenträgheitsmoment.

Bild 7 zeigt beispielhaft ein mit der Methode nach [4] erstelltes Impuls-Zeit Diagramm (entspricht Messung 3a in Tabelle 1) mit drei Impulsfolgen mit einer Dauer von je 12 vollständigen Schwingungen der Waag. Die Impulsfolgen wurden während eines Gewichtsablaufes gewonnen. Dieses Bild zeigt, dass trotz einiger Asymmetrien in den Einzelschwingungen die mittlere Schwingungsdauer  $T_m$  recht stabil bleibt.

### Die Geometrie im Detail

Alle Winkelangaben werden hier auf die waagerechte Lage der Abbildungen 3b und 3c bezogen,

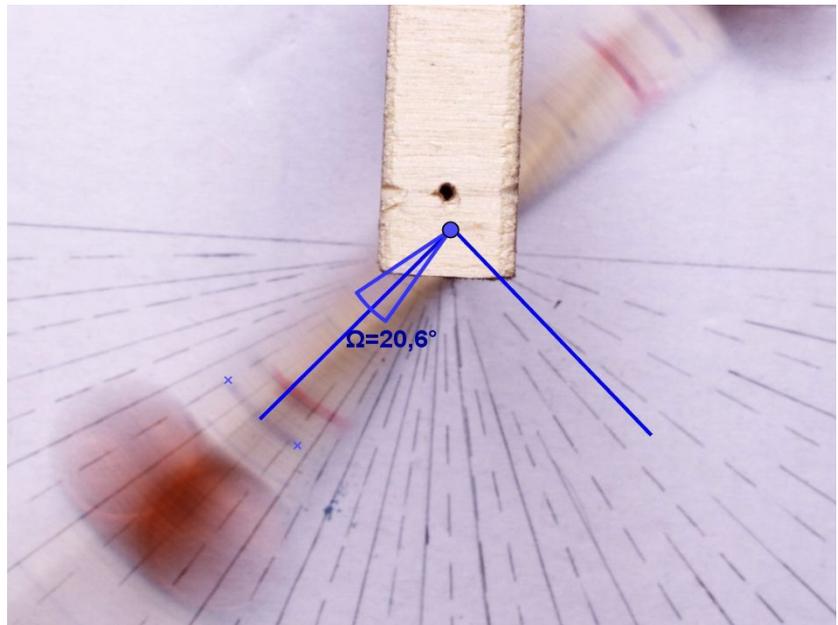
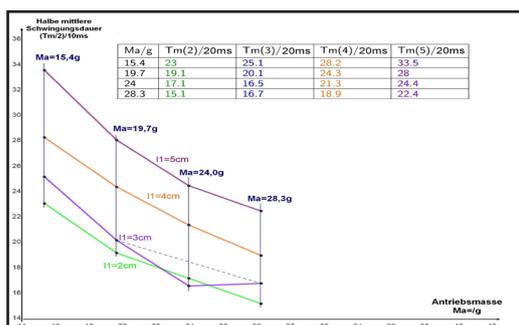


Bild 5: "Dynamische" Messung der Waagauslenkung während des Betriebs des Modells.

Messung	Antriebsmasse $M_a/g$	Abstand der Massebelegung auf der Waag von der Spindelachse $l_1 / cm$	Halbe mittlere 'Schwingungsdauer' $(T_m/2)/ms$
1a	15,4	2	230
2a	19,7	2	191
3a	24	2	171
4a	28,3	2	151
1b	15,4	3	251
2b	19,7	3	201
3b	24	3	165
4b	28,3	3	167
1c	15,4	4	282
2c	19,7	4	243
3c	24	4	213
4c	28,3	4	189
1d	15,4	5	335
2d	19,7	5	280
3d	24	5	244
4d	28,3	5	224

Tabelle 1 Abhängigkeit der Schwingungsdauer von Antriebsmasse und Abstand der Trägheitsmassen auf der Waag von der Spindelachse. Diese betragen jeweils 3 Gramm.

mit  $K_{su}$  auf der linken, und  $K_{so}$  auf der rechten Seite. Die Winkel  $\beta$  in den Bewegungskreisen der Spindellappen sind linksdrehend positiv, beginnend mit 0 Grad bei 3 Uhr. Der Winkel  $\epsilon$ , welchen

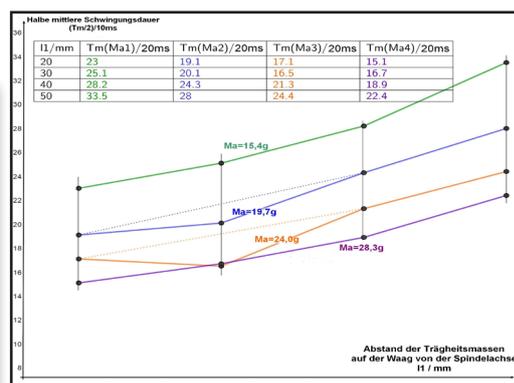


Bild 6a (innen) Grafische Darstellung der Abhängigkeit der Schwingungsdauer  $T_m$  von der Antriebsmasse ( $M_a$ ).

Bild 6b (außen) Grafische Darstellung der Abhängigkeit der Schwingungsdauer ( $T_m$ ) von dem Abstand ( $l_1$ ) der Trägheitsmassen auf der Waag zur Spindelachse.

die Stifte im Bewegungskreis des Hemmungsrades überstreichen, wird rechtsdrehend positiv gezählt, beginnend mit 0 Grad bei 9 Uhr. In der hier gewählten Ausgangslage (Schritt 0) ist  $b(su) = 0$  Grad,  $b(so) = 0$  Grad - 90 Grad = 270 Grad, und  $e(su) = 0$  Grad. Der Hemmungsstift S1 steht bei 0 Grad gegenüber su.

Der Drehwinkel  $\beta(su)$  des unteren Spindellappens, sowie der korrespondierende Drehwinkel  $e(su)$  des Hemmungsrades über den hinweg der untere Spindellappen aus der hier gewählten Ausgangsposition heraus von dem Hemmungsstift S1 bis zur Auslösung bewegt wird, ist nur abhängig von der Breite  $s$  des Spindellappens und

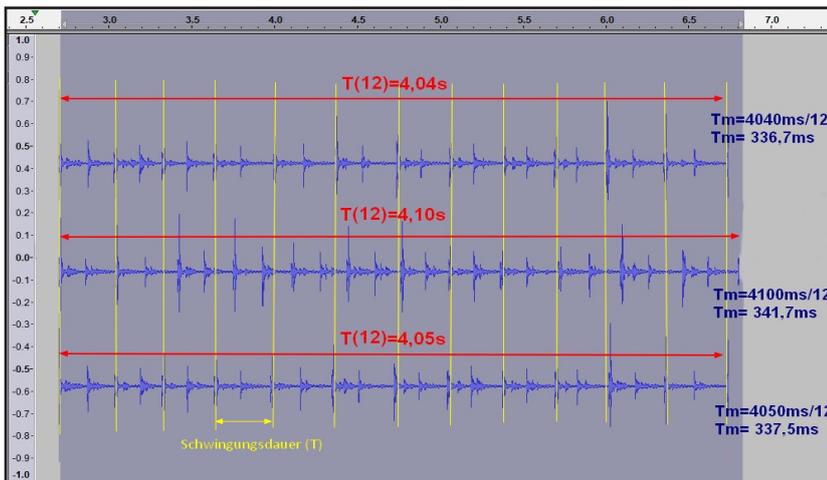


Bild 7:

Messung der mittleren Schwingungsdauer der Waag mittels Aufnahme eines Impuls-Zeit Diagramms.

der maximalen ‚Eingriffstiefe‘  $e=s+t-a$  der Hemmungsstifte in die Spindellappen. Mit den Werten  $s=1,5$ cm,  $t=1,6$ cm und  $a=2,7$ cm wird  $e=0,4$ cm. Aus der Geometrie von Bild 3b folgt

$$Gl. 2a: \cos(\beta(su)) = (1-e/s) = (1-0,4/1,5) = 0,733$$

Der Winkel  $\beta(su)$ , bei dem sich der Hemmungsstift von dem Spindellappen löst ist damit

$$\beta(su) = 42,8^\circ$$

Der Winkel  $\varepsilon(su)$ , um den sich zeitgleich das Hemmungsrad weiterdreht, folgt aus der Bedingung (Anm. 8)

$$Gl. 2b: Rh \cdot \sin(\varepsilon(su)) = s \cdot \sin(\beta(su))$$

(siehe auch Gl. 1h)

Mit den Abmessungen  $Rh=4,8$ cm und  $s=1,5$  cm im Modell folgt

$$Gl. 2c: \varepsilon(su) = \arcsin((1,5/4,8) \cdot \sin(42,8^\circ)), \text{ und somit}$$

$$\varepsilon(su) = 12,2^\circ$$

Da sich der obere Spindellappen zeitgleich aus seiner Ausgangsposition bei 270° um den gleichen Winkel  $\beta = 42,8^\circ$  wie der untere Spindellappen mit gleicher Drehrichtung weiterbewegt hat – hier aber passiv –, steht ersterer nun auf der Position

$$Gl. 2d: \beta(so) = 270^\circ + 42,8^\circ = 312,8^\circ$$

Der in der folgenden Bewegungsphase die Richtungsumkehr der Spindel einleitende Hemmungsstift S9 hat im Bewegungskreis des Hemmungsrades rechtsdrehend die Position

$$Gl. 2e: 2,2^\circ = 179,8^\circ \text{ eingenommen.}$$

Der korrespondierende Winkel  $\beta(S9)$  von so in Kso berechnet sich aus

$$Gl. 2b: Rh \cdot \sin(\varepsilon(su)) = s \cdot \sin(\beta(S9))$$

bzw.  $\sin(\beta(S9)) = (Rh/s) \cdot \sin(\varepsilon(su)) = (4,8/1,5) \cdot \sin(179,8^\circ)$ , und damit

$$\beta(S9) \approx 0^\circ$$

Der obere Spindellappen bewegt sich linksdrehend in Richtung S9, S9 seinerseits bewegt sich rechtsdrehend im Hemmungskreis auf (so) zu. Treffen sich beide auf der Eingriffslinie im Bereich zwischen den beiden Schnittpunkten derselben mit dem Bewegungskreis Kso, so erzwingt S9 eine Richtungsumkehr der Spindel.

Von der Position des oberen Spindellappens bei  $\beta(so) \approx 313$  Grad mit Beginn der Ablösung des unteren Spindellappens von S1, bis zu dem Kontakt von (so) mit S9 auf der Eingriffslinie, erfährt (so) eine freie unbeschleunigte Bewegung über einen Winkel  $\Delta \geq (317^\circ - 313^\circ) = 4^\circ$ . Diese 4 Grad sind eine untere Grenze für die freie Bewegung, da (so) und S9 auch zu einem etwas späteren Zeitpunkt im Bereich der Eingriffslinie zusammen treffen können. Für den Auslenkwinkel ( $\Omega$ ) der Waag (siehe Bild 5) gilt die Bedingung, dass ersterer ungefähr dem doppelten Winkel der freien Bewegung bei einer Halbschwingung entspricht.

$$Gl. 2c: \Omega \approx 2 \cdot \Delta$$

Gemessen wurden an dem Modell etwa  $\Omega = 20$  Grad (Bild 5), so dass  $\Delta$  realistisch etwa bei 10 Grad liegt.

**Fazit**

Zum Abschluss meiner Überlegungen zu diesem einfachen Gangmodell habe ich einige, für mich überraschende Erkenntnisse gewonnen. Zunächst fällt auf, dass sich das Modell auch ohne den Faden betreiben lässt, mit dem die Spindel aufgehängt ist (letztere steht dann unten auf). Entsprechend kann es sich bei den ‚Schwingungen‘ der Waag, wegen der in diesem Fall fehlenden Rückstellkraft, nicht um eine solche in streng physikalischem Sinne handeln. Die für eine Schwingung erforderliche periodische Richtungsumkehr wird hier bei der Spindelhemmung über den ‚Trick‘ der diametral zum Hemmungsrad

einander gegenüberliegenden Spindellappen gewonnen. Dadurch kommen bei gleichbleibender Drehrichtung des Hemmungsrades aus Sicht der Spindellappen die Hemmungsstifte aus jeweils entgegengesetzten Richtungen. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu einer Hemmung mit Anker und Waag, bei welcher der Anker tangential zum Hemmungsrad angeordnet ist. Die Hemmungsstifte kommen in diesem Fall aus Sicht beider Ankerklauen aus gleicher Richtung.

(Falls Interesse an der Originalbeschreibung aus [1] besteht, können Sie gerne eine Anfrage senden an r-lem@telekom.de).

### Anmerkungen:

- 1 Im Prinzip haben auch Sanduhren mit dem engen Durchflusskanal eine Art Hemmung.
- 2 Eine Zerlegung von 360 Grad in die Primfaktoren  $360 \text{ Grad} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ , zeigt, dass theoretisch noch  $3 \cdot 3 = 9$  und  $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$  als ungerade Teiler von 360 Grad in Frage kommen. Bei Verwendung von 9 Nägeln wäre der Winkelabstand zwischen 2 Hemmungsstiften mit 40 Grad sehr groß, und bei 45 Nägeln wäre dieser Winkelabstand mit 8 Grad sehr klein.
- 3 Diese Tatsache bildet die Grundlage für die Möglichkeit aus der akustischen Ganganalyse durch Abzählen der Impulse die Zeit für eine Umdrehung des Hemmungsrades zu messen.
- 4 Die Beziehung zwischen den Winkeln  $\varepsilon$  und  $\beta$ , sowie die Abhängigkeit des Winkels  $\beta$  von der Geometrie zwischen Spindel, Spindellappen und Hemmungsrad wird weiter unten noch näher erläutert.
- 5 Das Verhältnis von aktivem zu passivem Abschnitt wird hier (geschätzt aus Beobachtungen am Modell) bei maximal 1/10 liegen.
- 6 Da die Kräfte hier in der Massen-Einheit Gramm angegeben sind, muss die Krafteinheit F formal durch die Fallbeschleunigung G geteilt werden. Jede in Gramm geeichte Waage macht diesen Schritt automatisch.
- 7 Zur Messung der Gangfrequenz wurde hier der in DGC-Mitteilungen Nr.156, Winter 2018 [4] beschriebene Schallaufnehmer in Kombination mit der frei nutzbaren Software ‚Audacity‘ verwendet. Alternativ kann auch ein Smartphone oder ein mit einer Aufnahmefunktion ausgestattetes mp3-Abspielgerät genutzt werden.
- 8 Diese Bedingung ist die Gleichung der ‚Übersetzung‘ der Drehwinkel zwischen Hemmungsrad und Spindel.

### Abbildungsverzeichnis:

Tabelle 1 Abhängigkeit der Schwingungsdauer von Antriebsmasse und Abstand der Trägheitsmassen auf der Waag von der Spindelachse. Diese betragen jeweils 3 Gramm.

- Bild 1 Cover-Seite des Buches „Zeit und Zeitmessung“ [1].
- Bild 2a Die ‚Bastel-Uhr von Peter Fries‘ aus [1, Seite 30].
- Bild 2b Gesamtansicht des nachgebauten Gang-Modells
- Bild 3a Darstellung der Positionen von Hemmungsrad und Spindellappen zueinander für die Ausgangsposition (links), die Position am Ende von Schritt 1 (erste Halbschwingung der Waag, Mitte) und die Position am Ende von Schritt 2 (zweite Halbschwingung, rechts).
- Bild 3b Darstellung der geometrischen Verhältnisse für die Situationen aus Bild 3a links und Mitte.
- Bild 3c Darstellung der geometrischen Verhältnisse für die Situation aus Bild 3a rechts.
- Bild 4a Messung der Kraft (Fh) an den Hemmungsstiften.
- Bild 4b Messung der Kraft (Fw) an den Enden der Waag im Abstand (Rw) von der Spindelwelle.
- Bild 5 ‚Dynamische‘ Messung der Waagauslenkung während des Betriebs des Modells.
- Bild 6a Grafische Darstellung der Abhängigkeit der Schwingungsdauer ( $T_m$ ) von der Antriebsmasse ( $M_a$ ).
- Bild 6b Grafische Darstellung der Abhängigkeit der Schwingungsdauer ( $T_m$ ) von dem Abstand ( $l_1$ ) der Trägheitsmassen auf der Waag zur Spindelachse.
- Bild 7 Messung der mittleren Schwingungsdauer der Waag mittels Aufnahme eines Impuls-Zeit Diagramms.

### Liste der Bezeichner in Formeln und Abbildungen:

Hinweise zu den verwendeten Einheiten: Massen werden in Gramm [g], und Längen in [cm] angegeben.

Davon abgeleitete Größen wie Kräfte und Drehmomente in den entsprechenden Einheiten. Also Kräfte (auch die Gewichtskraft) in der Einheit  $[g \cdot cm/s^2]$ , sowie Drehmomente in  $[g \cdot cm \cdot cm/s^2]$ . Der Wert 9,81 der Fallbeschleunigung in der Einheit  $[m/(s \cdot s)]$  wird dann zu  $981 \text{ cm}/s^2$ . Die Zeiten in den Messungen der ‚Schwingungsdauern‘ sind in ms dargestellt.

- a Abstand zwischen Hemmungsrad und Spindel
- Dh Drehmoment an der Hemmungsradwelle.
- Ds Drehmoment an der Spindelwelle.
- e Eingrifftiefe der Spindellappen in die Hemmungsstifte  $e = s + t - a$ .
- f Gangfrequenz in 1/s mit  $f = 1/T_m$ .
- Fh Kraft an den Hemmungsradstiften.
- Fs Kraft an den Spindellappen.

- Fa Die Antriebskraft ist identisch dem Antriebsgewicht ( $G_a$ ).
- Fw Kraft an den Enden der Waag.
- G Fallbeschleunigung =  $9,81\text{m}/(\text{s}^*\text{s})$  bzw.  $981\text{cm}/(\text{s}^*\text{s})$ .
- $G_a$  Antriebsgewicht
- l1 Abstand der Gewichte auf der Waag von der Spindelachse.
- $K_{so}, K_{su}$  für den oberen bzw. unteren Spindellappen.
- $M_a$  Antriebsmasse
- $M(0), M(i)$  Grund- bzw. Zusatzmasse zum Antrieb des Gangmodells
- $M_w(1), M_w(2)$  Zusatzmassen zur Gangregulierung an der Waag
- N Anzahl der Stifte am Hemmungsrad.
- r Radius der Fadenspule.
- $R_h$  Radius des Hemmungsrades.
- $R_s$  Radius der Bewegungskreise  $K_{su}$  und  $K_{so}$  der beiden Spindellappen. Es gilt  $r_s=s$ .
- $R_w$  Länge eines Armes der Waag.
- s Breite der Spindellappen.
- t Länge der Hemmungsstifte.
- $T_m$  Mittlere ‚Schwingungsdauer‘ der Waag. in ms.
- X Schnittpunkt der Spitze eines Spindellappens mit der ‚Eingriffslinie‘.
- $\alpha$  Winkelbeschleunigung in Grad/ $(\text{s}^*\text{s})$  oder Rad/ $(\text{s}^*\text{s})$ .
- $\varepsilon$  Winkel-Position eines Hemmungsstiftes in Grad auf dem Hemmungsrad bezogen auf dessen Mittelpunkt.
- $\beta_o, \beta_u$  Winkelposition der Spindellappen innerhalb der Bewegungskreise  $K_{so}$  und  $K_{su}$ .
- W Vollständige Winkelauslenkung der Waag über beide Drehrichtungen der Spindelwelle.
- $\Delta$  Winkel der freien Drehung eines Spindellappens ohne Kontakt zu einem Hemmungsstift.

**Quellen:**

- 1 Gaitzsch, Rainer: Zeit und Zeitmessung, 1. Auflage, Stuttgart 1962.
- 2 Schriften der Freunde alter Uhren Heft VII 1967/68 Seiten 32 bis 35.
- 3 Link zur Audio-Software Audacity (<https://www.audacity.de/>).
- 4 Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Chronometrie, Heft Nr. 156 Winter 2018, Seiten 37 bis 47.
- 5 Kuchling: Taschenbuch der Physik Seiten 122ff, 8. Auflage, Frankfurt/Main 1986.